15-10-15.

Πίνακες

$A \in \mathbb{R}^{n,m}$: ο A είναι $n \times m$ πραγματικός πίνακας.

$A \in \mathbb{C}^{n,m}$ >> >> >> μιγαδικός πίνακας.

$B = A^T$ τέτοιος ώστε $b_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1(1)n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$

$B = A^H$ συζυγής ανάστροφος $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A^H = A^T$ αν $A \in \mathbb{R}^{n,m}$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $(AB)^H = B^H \cdot A^H$, $(B^T)^T = B$

$(B^H)^H = B$, $(B^T)^H = (B^H)^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) ο A είναι αντιστρέψιμος.

ii) $\det(A) \neq 0$.

iii) Οι γραμμές του A είναι γραμμ. ανεξ.

iv) Οι στήλες του A είναι γραμμ. ανεξ.

v) Το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση το $x = 0$.

vi) Το γραμμ. σύστημα $Ax = B$ έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1} \cdot b$.

A^{-1} είναι ο αντίστροφος του A τ.ω. $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αν $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, τότε λ είναι ιδιοτιμή του A. Και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0$.

n ακριβώς μιγαδικές λύσεις.

Αν x ιδιοδιάνυσμα τότε cx, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα.

$y = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$, τότε $\|y\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$

Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχει το πολύ n γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.

Αν λ είναι ιδιοτιμή του A πολ/τας m τότε στην ιδιοτιμή λ, αντιστοιχούν k-γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα με $1 \leq k \leq m$.

Ορισμός: Ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός αν-ν $A=A^T$

Ορισμός: Ο πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ είναι Ερμιτιανός αν-ν $A=A^H$.

Πρόταση: Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού (συμμετρικού) πίνακα είναι πραγματικές και υπάρχει βάση n γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανυσμάτων που είναι ορθομοναδιαία. (ορθογώνια όταν είναι συμμετρικός.)

$(x^i, x^j)=0$, $\|x^i\|_2=1$

Νόρμες πινάκων

Η απεικόνιση $\|\cdot\|$ $\mathbb{C}^{n,n}\to\mathbb{R}_{+,0}$ λέγεται νόρμα αν ισχύουν οι ιδιότητες: i) $\|A\|\geq 0$, $\|A\|=0$ αν-ν $A=0$, $A\in\mathbb{C}^{n,n}$.

ii) $\|\lambda A\|=|\lambda|\cdot\|A\|$, $A\in\mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

iii) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$, $A,B\in\mathbb{C}^{n,n}$ (τριγωνική)

iv) $\|A\cdot B\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$, $A,B\in\mathbb{C}^{n,n}$ (πολλαπλασιαστική)

Φυσικές νόρμες

Ορισμός: Έστω $\|\cdot\|$ είναι μια διανυσμ. νόρμα. Τότε ορίζουμε αντίστοιχη νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ ως: $\|A\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

$$\|A+B\|=\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|}=\frac{\|(A+B)\cdot y\|}{\|y\|}\leq\frac{\|Ay\|}{\|y\|}+\frac{\|By\|}{\|y\|}\leq\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}+$$

$$\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}=\|A\|+\|B\|$$

$$\|A\|\geq\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\iff\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|.$$

$$\|A\cdot B\|=\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|A\cdot Bx\|}{\|x\|}\leq\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|A\|\cdot\|Bx\|}{\|x\|}\leq\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|x\|}{\|x\|}=\|A\|\cdot\|B\|$$

Ισοδύναμος ορισμός: $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|\iff\|A\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$.

Έστω $y=c\cdot x$, τότε $\frac{\|Ay\|}{\|y\|}=\frac{\|Acx\|}{\|cx\|}=\frac{|c|\cdot\|Ax\|}{|c|\cdot\|x\|}=\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Παίρνουμε $y = \frac{1}{\|x\|} x$, τότε $\|y\| = 1$.

$|f(x) - f(y)| = |\|Ax\| - \|Ay\|| \leq \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| = \|A\| \|x-y\|$.

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε φυσική νόρμα ισχύει ότι $\|I\| = 1$.

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1.$$

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε φυσική νόρμα ισχύει $\rho(A) \leq \|A\|$.

Έστω λ ιδιοτιμή κ' το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A.

$Ax = \lambda x \Rightarrow \|Ax\| = |\lambda x| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Leftrightarrow |\lambda| \leq \|A\|$

Αυτό ισχύει και για ιδιοτιμή λ τω $|\lambda| = \rho(A) \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\rho(A) = 0$, ενώ $A \neq 0$.

<u>Θεώρημα</u>: $\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ τω $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

<u>Θεώρημα (Neuman)</u>: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και μια φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|A\| < 1$. Τότε ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

<u>Απόδ.</u>: Έστω $I-A$ είναι μη αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ τω $(I-A)x = 0 \Leftrightarrow x = Ax \Rightarrow \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow 1 \leq \|A\|$, άτοπο.

$I = (I-A)^{-1}(I-A) = (I-A)^{-1} - (I-A)^{-1} A$

$1 = \|I\| = \|(I-A)^{-1} - (I-A)^{-1} A\| \leq \|(I-A)^{-1}\| + \|(I-A)^{-1} A\| \leq$
$\|(I-A)^{-1}\| + \|(I-A)^{-1}\| \cdot \|A\| = \|(I-A)^{-1}\| \cdot \|(1 + \|A\|) \Rightarrow \frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\|$.

$1 = \|I\| = \|(I-A)^{-1} - (I-A)^{-1} A\| \geq |\|(I-A)^{-1}\| - \|(I-A)^{-1} A\|| \geq \|(I-A)^{-1}\|$
$- \|(I-A)^{-1}\| \cdot \|A\| = (I-A)^{-1}(1 - \|A\|) \Rightarrow \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ $\|A\|_2 = \rho(A^H \cdot A)^{1/2}$

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\| \Rightarrow \|A\|_1 \geq \|Ax\|$

$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq$

$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \max_{k} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_{k} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$. Ισχύει κ' για x, τω $\|A\|_1 = \|Ax\|$

Επομένως $\|A\|_1 \leq \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Θεωρώ το διάνυσμα $e^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$ και έστω $\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|Ae^k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \|A\|_1$.

$\|A\|_1 = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2^2$, $\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (Ax)^H \cdot (Ax) = x^H A^H A x =$

$= (x, A^H A x)$.

Ο $A^H A$ είναι ερμιτιανός $(A^H A)^H = A^H \cdot (A^H)^H = A^H A$.

Επομένως έχει πραγμ. ιδιοτιμές κ' βάση ορθομοναδιαίων ιδιοδιανυσμάτων. Ο $A^H A$ είναι και μη αρνητικά ορισμένος $(x, A^H A x) \geq 0$, αφού $(x, A^H A x) = \|Ax\| \geq 0$.

Επομένως οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές.

$(x_i, A^H A x^i) = (x^i, \lambda_i x^i) = \lambda_i (x_i, x_i) = \lambda_i \geq 0$.

Θεωρώ $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ κ' x^i $i = 1(1)n$ τα αντ. ιδιοδιαν. με $\|x^i\|_2 = 1$. Έστω $x \in \mathbb{C}^n$ με $\|x\| = 1$, τότε $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$, $(x, x) = 1 \Leftrightarrow$

$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i , \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c_i} \cdot c_i (x^i, x^i) = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1$.

$\|Ax\|^2 = (x, A^H A x) = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \cdot \lambda_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \right) \lambda_n = \lambda_n = \rho(A^H A)$, θεωρώ $x = x^n$

$\|Ax^n\|^2 = \rho(A^H A)$

$\|A\| = \rho(A^H A)^{1/2}$.